Лекция №8

Тема: **Вторая квадратичная форма поверхности и ее приложения**

План лекции

1. Вторая квадратичная форма поверхности.
2. Нормальная кривизна поверхности. Теорема Менье.
3. Главные кривизны поверхности. Формула Эйлера
4. Гауссова и средняя кривизна поверхности. Теорема Родрига. Типы точек на поверхности.

Кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма

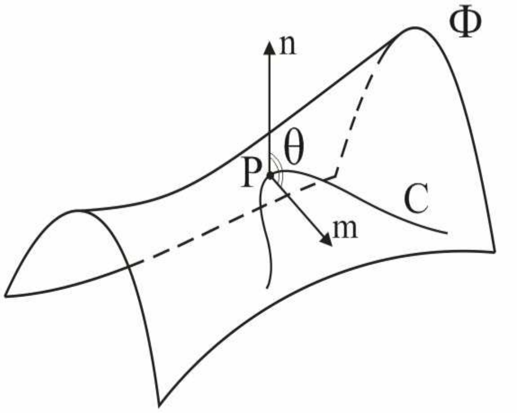


Рис. 21

Пусть *Ф* – гладкая поверхность, параметризованная вектор-функцией *f(u,v)*, а *C* гладкая кривая на этой поверхности, заданная своими внутренними уравнениями $u = \varphi_1(t), v = \varphi_2(t)$, которым соответствует ее параметризация $\varphi(t) = f(\varphi_1, \varphi_2)$. Пусть $P = \varphi(t_0)$ - точка на кривой *C*.

Найдем формулу для кривизны кривой *C* в точке *P*. Обозначим через *Θ* угол между нормалью $\vec{n}$ поверхности *Ф* в точке *P* (*рис. 21*).

Рассмотрим естественную параметризацию $\psi(s)$ кривой *C*. Пусть она соответствует внутренним уравнениям $u = \psi_1(s), v = \psi_2(s)$, и пусть при этом $P = \psi(s_0)$. Кривизна *k* кривой *C* в точке *P* вычисляется по формуле

$$k = |\psi''(s_0)| = \frac{\psi''(s_0)\cdot\vec{n}}{\cos\theta} \qquad (*)$$

Чтобы найти $\psi(s_0)$, продифференцируем выражение для $\psi'(s)$:

$$\psi'(s) = f_u(\psi_1,\psi_2)\cdot\psi_1' + f_v(\psi_1,\psi_2)\cdot\psi_2'.$$

Проделав несложные вычисления, получим

$$\psi''(s) = f_{uu}(\psi_1,\psi_2)\cdot\psi_1'^2 + 2f_{uv}(\psi_1,\psi_2)\psi_1'\psi_2' +$$
$$f_{vv}(\psi_1,\psi_2)\psi_2'^2 + f_u(\psi_1,\psi_2)\psi_1'' + f_v(\psi_1,\psi_2)\psi_2''.$$

Домножим обе части на $\vec{n}$ скалярно, т.к. первые производные вектор-функции *f* ортогональны вектору $\vec{n}$, то последние два слагаемых дадут ноль. Получим: $\psi''\cdot\vec{n} = f_{uu}\cdot\vec{n}\cdot\psi_1'^2 + 2f_{uv}\cdot\vec{n}\cdot\psi_1'\psi_2' + f_{vv}\cdot\vec{n}\cdot\psi_2'^2$.

Пусть $L = f_{uu}\cdot\vec{n}, M = f_{uv}\cdot\vec{n}, N = f_{vv}\cdot\vec{n}$

Тогда $$\psi'' \cdot \vec{n} = L \cdot \psi_1'^2 + 2M \cdot \psi_1'\psi_2' + N \cdot \psi_2'^2 .$$

Мы получили формулу, по которой вычисляется *вторая квадратичная форма поверхности*. Вторая квадратичная форма поверхности обозначается $\mathrm{II}(\psi_1', \psi_2')$, функции *L, M, N* называются *коэффициентами второй квадратичной формы поверхности.* Часто удобно считать вторую квадратичную форму функцией, определенной на множестве касательных векторов или просто на касательной плоскости $T_p\Phi$. Пользуясь этими обозначениями, формулу (*) можно записать

$$k = \frac{\mathrm{II}(\psi_1', \psi_2')}{\cos\theta}$$

Вернемся к исходной параметризации $\varphi(t)$. Поскольку $\psi'(s) = \dfrac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$, то

$$\psi_1' = \frac{\varphi_1'}{|\varphi'|},\ \psi_2' = \frac{\varphi_2'}{|\varphi'|}$$

(где все значения берутся по-прежнему в s_0 и t_0). Тогда

$$k \cdot \cos\theta = \frac{\mathrm{II}(\varphi_1', \varphi_2')}{\mathrm{I}(\varphi_1', \varphi_2')} .$$

Теперь полученное выражение для кривизны кривой *C* в точке *P* принимает вид

$$k = \frac{\mathrm{II}(\varphi_1', \varphi_2')}{\mathrm{I}(\varphi_1', \varphi_2') \cdot \cos\theta} .$$

Нормальная кривизна поверхности

Особый интерес представляют кривые, для которых $\cos\theta = \pm 1$,т.е. те кривые, чья соприкасающаяся плоскость в точке *P* перпендикулярна касательной плоскости $T_p\Phi$. Пусть *l* – касательная прямая кривой *C* в точке *P*.
Рассмотрим плоскость, проходящую через *l* и нормаль к *Φ* в точке *P*. Ее пересечение с достаточно малой окрестностью точки *P* на поверхности *Φ* дает нам особую кривую C_0 – нормально сечение поверхности *Φ* в направлении касательной *l*.

Если θ_0 - угол между главной нормалью m_0 к C_0 и нормалью *n* к поверхности в точке *P*, то $\cos\theta_0 = \pm 1$. Пусть k_0 – кривизна этой кривой в точке *P*. Тогда число $k_n = k_0 \cdot \cos\theta_0 = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$ называется *нормальной кривизной* поверхности *Φ* в направлении касательной *l*. (*рис.22*)

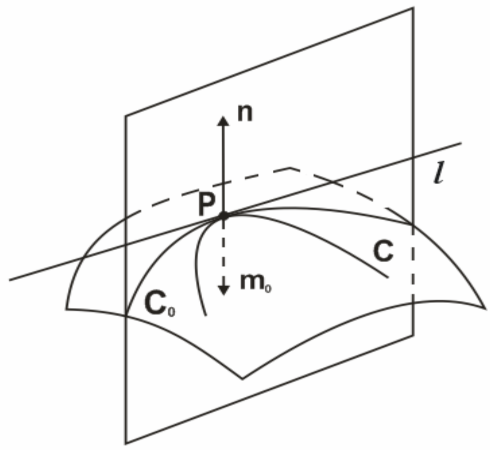


Рис.22

<u>Теорема Менье</u>. *Кривизна k кривой C на поверхности зависит только от угла Θ и нормальной кривизны k_n в направлении касательной этой кривой. Она может быть вычислена по формуле.*

$$k = \frac{k_n}{\cos\theta}$$

Нормальную кривизну k_n поверхности Φ в направлении касательной l будем также называть *нормальной кривизной кривой C в точке P* и обозначать также k_n. Линия на поверхности называется асимптотической, если в каждой ее точке k_n=0. Уравнение асимптотической линии можно получить, решив дифференциальное уравнение $L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2 = 0$.

Если две кривые на поверхности Φ, проходящие через точку P, имеют в ней общую касательную, то очевидно, их нормальные кривизны в этой точке совпадают. Если $\bar{k}$ - вектор кривизны кривой C в точке P, то его скалярное произведение на вектор нормали $\bar{n}$ равно нормальной кривизне кривой C в точке P: $\bar{k} \cdot \bar{n} = |k| \cdot \cos\theta = k \cdot \cos\theta = k_n$

Теорема. *Если две кривые на поверхности Ф проходят через точку P и имеют в ней общую соприкасающуюся плоскость, не совпадающую с касательной плоскостью $T_P\Phi$, то их кривизны в этой точке равны.*

Следствие. *Кривизна кривой, лежащей на поверхности, в каждой точке равна кривизне сечения поверхности соприкасающейся плоскостью кривой в этой точке (рис.23).*

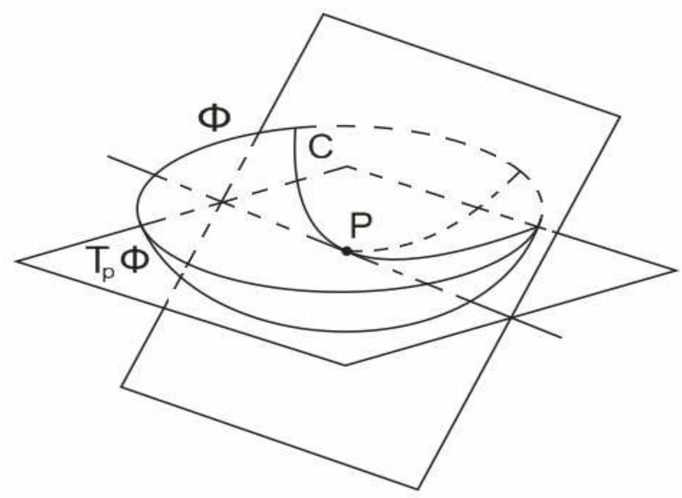


Рис.23

Типы точек на поверхности

Можно произвести классификацию точек поверхности в соответствии с типом соприкасающегося параболоида. Пусть F – соприкасающийся параболоид поверхности Φ в точке P.

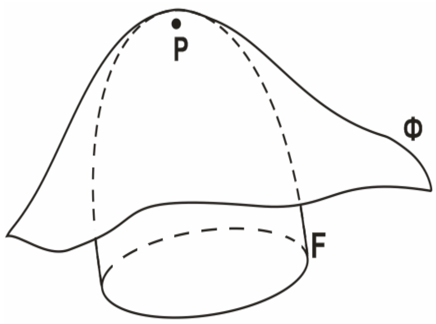


Рис.24

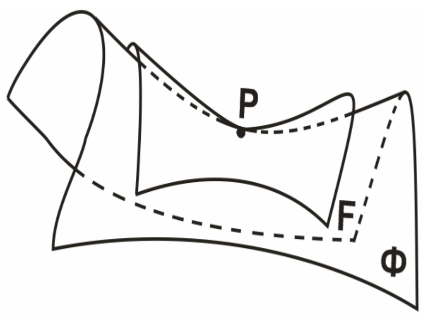


Рис. 25

P называется точкой *эллиптического типа*, если F – эллиптический параболоид (*рис.24*). *P* называется точкой *гиперболического типа*, если *F* –гиперболический параболоид (*рис.25*).

P называется точкой *параболического типа*, если *F* –параболический цилиндр или плоскость (*рис.26, 27*).

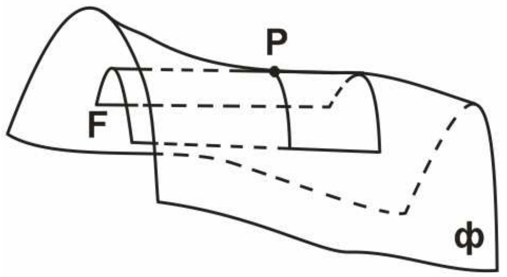


Рис. 26

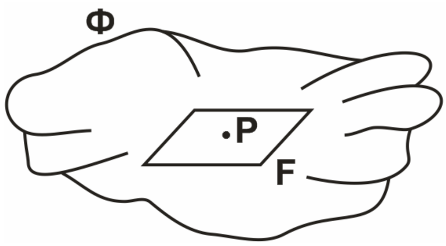


Рис. 27

Точка *P* эллиптического типа называется *точкой округления* или *омбилической*, если *F* – параболоид вращения (*рис.28).*

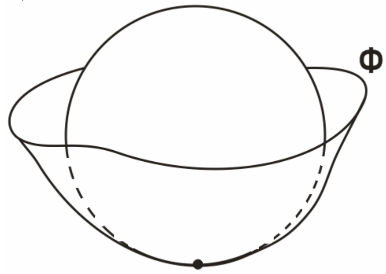


Рис. 28

Наконец, точка *P* параболического типа называется *точкой уплощения*, если *F* – плоскость.

Можно показать, что в окрестности точки эллиптического типа поверхность лежит по одну сторону от своей касательной плоскости (*рис.29*), а в окрестности гиперболического типа поверхность пересекается с касательной плоскостью по двум кривым (*рис.30*).

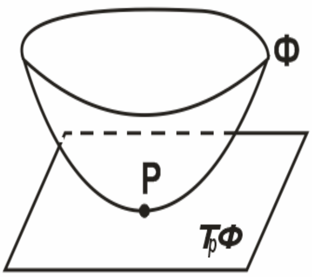


Рис. 29

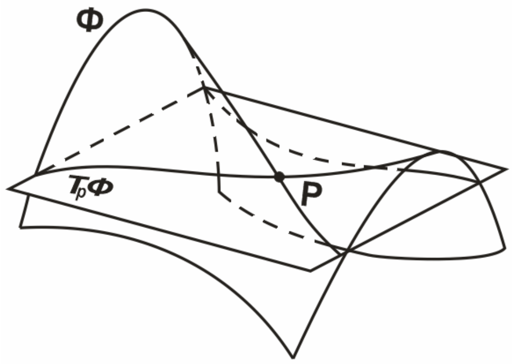


Рис. 30

В окрестности точки параболического типа ничего определенного про расположение поверхности относительно касательной плоскости заранее сказать нельзя.

Главные кривизны и формула Эйлера

Пусть *F* – соприкасающийся параболоид поверхности *Ф* в точке *P*. Из аналитической геометрии известно, что поворотом осей уравнение параболоида F можно привести к виду:

$$z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2)\,.$$

Рассмотрим касательную прямую *l*, проходящую через точки *P* и (x_0, y_0). Нормальную кривизну поверхности *Ф* в точке *P* в направлении прямой *l* можно вычислить по формуле

$$k_n = \frac{\mathrm{II}(x_0, y_0)}{\mathrm{I}(x_0, y_0)} = \frac{k_1 x_0^2 + k_2 y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} = k_1 \frac{x_0^2}{x_0^2 + y_0^2} + k_2 \frac{y_0^2}{x_0^2 + y_0^2}$$

Если обозначить через *Θ* угол между осью x и прямой *l*, то формулу можно записать в виде (рис. 31).

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

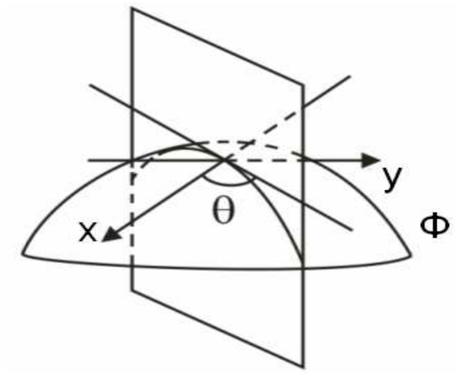


Рис. 31

Из этой формулы следует, что если $k_1 < k_2$, то

$$k_1 = k_1 \cos^2\theta + k_1 \sin^2\theta \le k_n(\theta) \le k_2 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = k_2,$$

причем равенство в одном из неравенств может иметь место только в одном случае, когда $\cos\theta = 0$ или $\sin\theta = 0$, т.е. когда прямая *l* совпадает с одной из координатных осей. Если же $k_1 = k_2$, то $k_n(\theta) = k_1$.

Таким образом, мы доказали теорему Эйлера.

Теорема. *В каждой точке гладкой поверхности существуют две перпендикулярные касательные прямые l_1 и l_2, в направлении которых нормальная кривизна поверхности принимает наибольшее и наименьшее значения k_1 и k_2. Если l – произвольная касательная прямая, образующая угол Θ с прямой l_1, то нормальная кривизна в направлении l вычисляется по формуле Эйлера*

$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Наибольшую и наименьшую нормальные кривизны поверхности в точке *P* называют ее главными кривизнами в этой точке, а направления, в которых достигаются главные кривизны, называются главными направлениями. Как мы видели, если главные направления в точке *P* различны: $k_1 \neq k_2$, то главные направления определены однозначно и они перпендикулярны друг другу. Если же главные кривизны равны: $k_1 = k_2$, то любое направление будет главным.

Гауссова кривизна и средняя кривизна

Произведение главных кривизн k_1, k_2 обозначается через *K* и называется *гауссовой кривизной* поверхности в точке *P*:

$$K = k_1 \cdot k_2.$$

В то время как сам соприкасающийся параболоид *F* определяется главными кривизнами k_1, k_2 и главными направлениями l_1, l_2, его тип полностью определяется произведением главных кривизн $k_1 k_2 = K$:

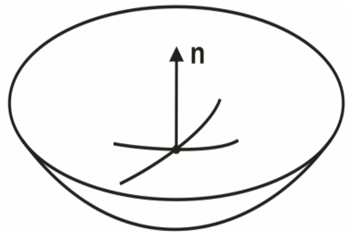
Если $k_1 k_2 > 0$, то F – эллиптический параболоид;

$k_1 k_2 < 0$, то F – гиперболический параболоид;

$k_1 k_2 = 0$, то F – параболический цилиндр или плоскость.

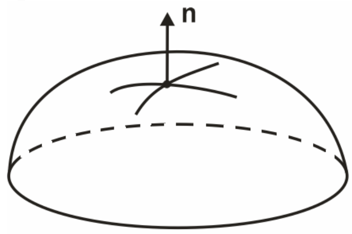
Таким образом, тип точки P на поверхности полностью определяется гауссовой кривизной K поверхности в этой точке:

если $K>0$, то P – точка эллиптического типа (рис. 32, 33);



$k_1, k_2 > 0$

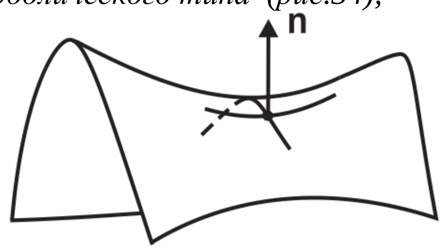
Рис. 32



$k_1, k_2 < 0$

Рис. 33

если $K<0$, то P – точка гиперболического типа (рис.34);



$k_1 > 0, k_2 < 0$

Рис. 34

если $K=0$, то P – точка параболического типа (рис. 35).

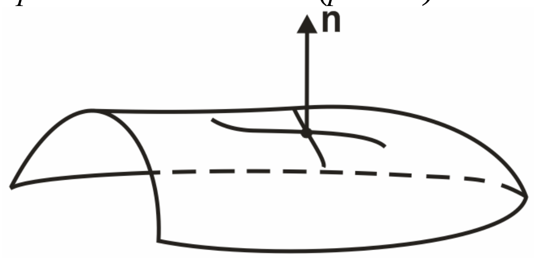


Рис. 35

Полусумма главных кривизн k_1, k_2 обозначается через H и называется *средней кривизной* поверхности в точке P:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Главные кривизны k_1, k_2 в точке P полностью определяются гауссовой кривизной K и средней кривизной H: по теореме Виета k_1 и k_2 являются корнями уравнения $x^2 - 2Hx + K = 0$

Заметим еще, что P является точкой округления тогда и только тогда, когда $H = K$, точкой уплощения – тогда и только тогда, когда $H = K = 0$.

Отметим одно важное свойство главных направлений.

<u>Теорема (Родрига).</u> *Пусть $f(u,v)$ - - параметризация гладкой поверхности Φ, и $P=f(u_0, v_0)$- точка на поверхности. Если направления координатных линий в точке P являются главными, то выполняются равенства*

$$n_u(u_0,v_0) = -k_1 f_u(u_0,v_0)\,,\quad n_v(u_0,v_0) = -k_2 f_v(u_0,v_0)\,,$$

где k_1 и k_2 – главные кривизны в точке P. (рис36)

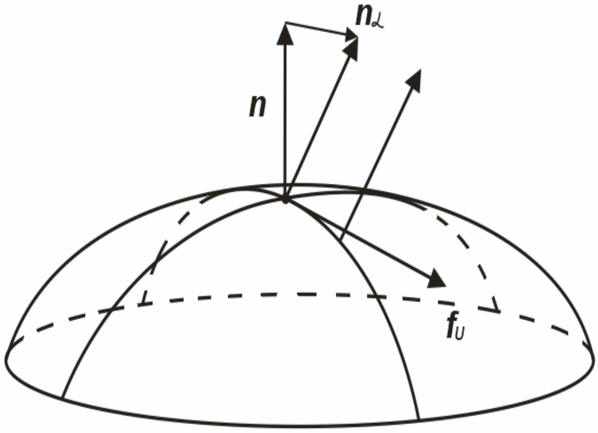


Рис. 36

С помощью коэффициентов первой и второй квадратичных форм можно вычислить гауссову и средние кривизны по формулам:

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad 2H = k_1 + k_2 = \frac{EN - 2MF + LG}{EG - F^2}.$$